مقرر المحاضرة النظرية الثانية

بداية يجب دراسة المحاضرة السابقة جيداً 😊

سندرس في هذه المحاضرة العناوين الآتية :

1- ما هو الفرق بين الإحصاء والاحتمال
2- المتحولات العشوائية وأنواعها
3- دالة التوزيع (القانون الاحتمالي)
4- التوقع الرياضي
5- التشتت
6- بعض التوزيعات المنفصلة الشهيرة

ما هو الفرق بين الإحصاء والاحتمال ؟

الإحصاء : هو علم عملي يهدف إلى دراسة ظاهرة معينة وظاهرة موجودة كأن نقدم دراسة إحصائية عن شيء معين بحيث نرتب النتائج وبحسب الفئات و الخ...

مثال : دراسة إحصائية لعدد الوفيات نتيجة أوبئة أو إصابات معينة معينة

الاحتمال : هو علم يدرس شيء مستقبلي بحيث نتكلم عن أحداث أو معلومات معينة لحل المسألة ودائماً نميل على القيمة الأقرب

مثال : استفادة المريض في حال تم إعطاؤه عقار معين

المتحولات العشوائية

ماذا نقصد بالمتحول العشوائي

المتحول العشوائي : هو تابع منطلقه المجموعة الكلية أو احتمال الحدث الأكيد Ω ومستقره IR

حيث $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$w \longrightarrow X(\Omega)$

هل لدينا أنواع للمتحولات العشوائية ؟

نعم يوجد لدينا نوعين من المتحولات وهما (المتحول المنقطع (المنفصل) - المتحول المتصل (المستمر))

1 - المتحول المنفصل : يكون المتحول منفصلاً إذا كانت جميع قيم المتحول (X_w) مجموعة منتهية أو قابلة للعد

إذا كانت غير منتهية فهي حتماً قابلة للعد ليكون المتحول منفصل

مثال : إذا كان لدينا نتائج رمي حجري نرد

$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3)......(6,6)\}$

حيث Ω فضاء العينة أو الحدث الأكيد

لنفرض X متحولاً عشوائياً يدل على مجموع الوجهين

$X = \{2, 3, 4, 5, 6 ...... 12\}$

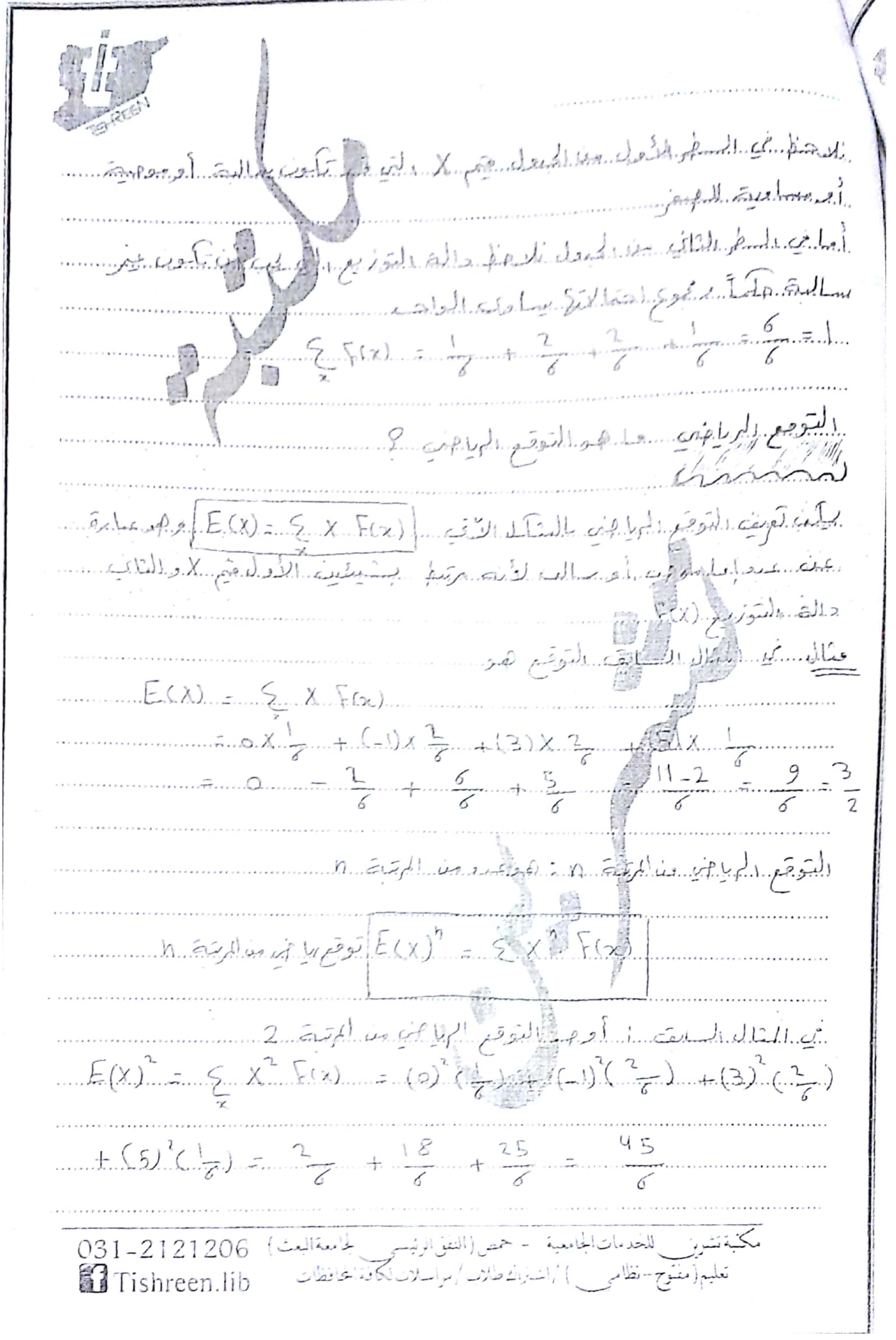
وهي مجموعة منتهية إذاً هو متحول منفصل

دالة التوزيع (القانون الاحتمالي)

تعرف بالشكل $F(x) = P(X = x)$ وتتميز هذه الدالة أنها دالة غير سالبة وتحقق أن المجموع $\sum_x F(x) = 1$ على جميع قيم المتحول x

مثال بفرض لدينا تجربة ما

X	0	-1	3	5
F(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$



نلاحظ في السطر الأول من الجدول قيم X التي قد تكون سالبة أو موجبة أو مساوية للصفر

أما في السطر الثاني من الجدول نلاحظ دالة التوزيع التي لا يمكن أن تكون غير سالبة. ملاحظة: مجموع احتمالاتها يساوي الواحد

$$\sum_x F(x) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

التوقع الرياضي ما هو التوقع الرياضي ؟

يمكن تعريف التوقع الرياضي بالشكل الآتي $\boxed{E(X) = \sum_x X\,F(x)}$ وهو عبارة عن عدد إما موجب أو سالب لأنه مرتبط بشيئين الأول قيم X والثاني دالة التوزيع $F(X)$

<u>مثال</u>: في المثال السابق التوقع هو

$$E(X) = \sum_x X\,F(x)$$

$$= 0 \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{2}{6} + (3) \times \frac{2}{6} + (5) \times \frac{1}{6}$$

$$= 0 - \frac{2}{6} + \frac{6}{6} + \frac{5}{6} = \frac{11-2}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

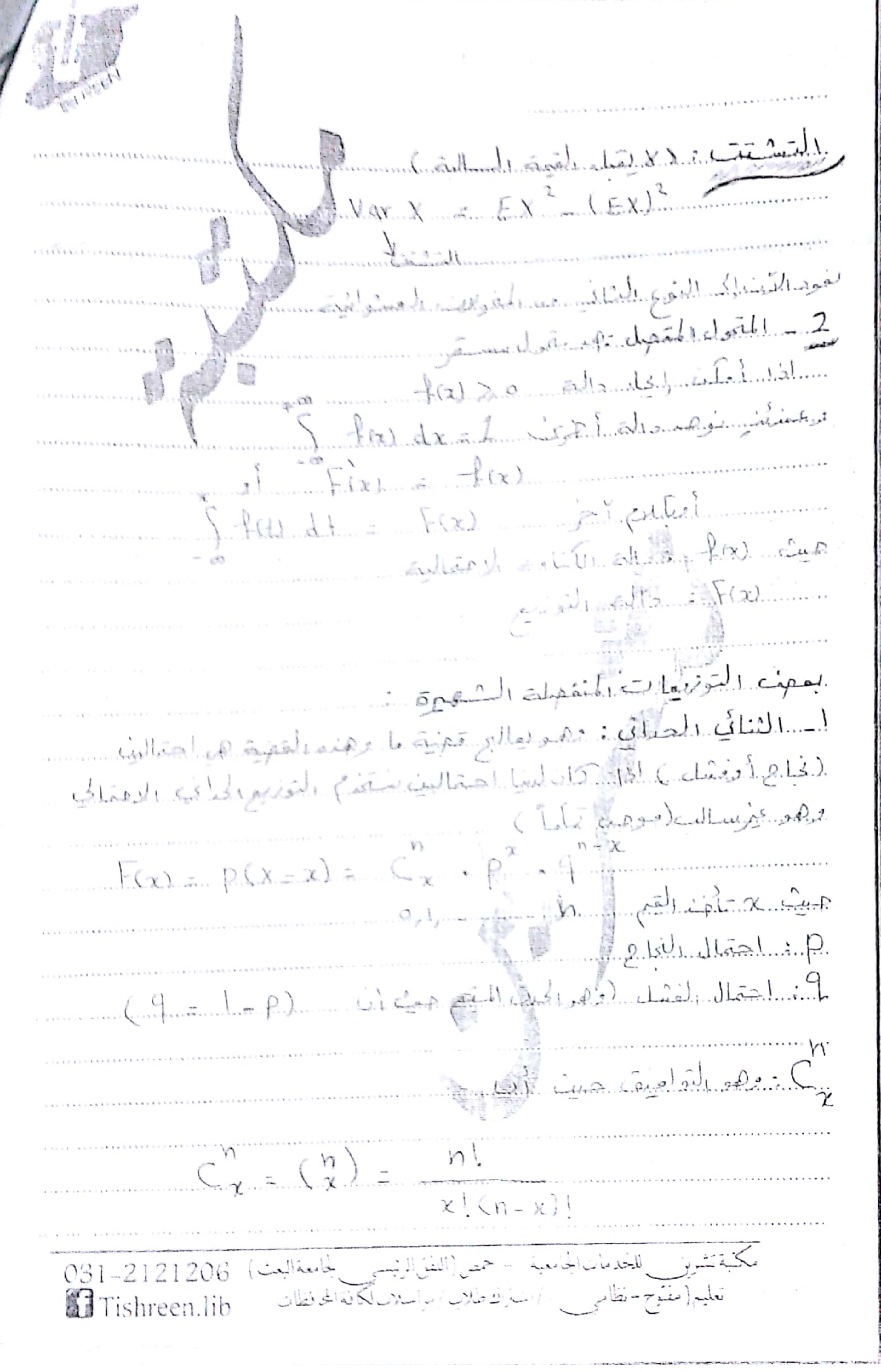
التوقع الرياضي من المرتبة n : هو عدد من المرتبة n

توقع رياضي من المرتبة n $\boxed{E(X)^n = \sum X^n F(x)}$

في المثال السابق : أوجد التوقع الرياضي من المرتبة 2

$$E(X)^2 = \sum_x X^2 F(x) = (0)^2\left(\frac{1}{6}\right) + (-1)^2\left(\frac{2}{6}\right) + (3)^2\left(\frac{2}{6}\right)$$

$$+ (5)^2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{6} + \frac{18}{6} + \frac{25}{6} = \frac{45}{6}$$



التشتت: لا يقبل القيمة السالبة

$$Var\,X = EX^2 - (EX)^2$$

التشتت

نعود للتشتت النوع الثاني من المتحولات العشوائية

2 - المتحول المتصل: أو متحول مستمر
اذا أمكن إيجاد دالة $f(x) \geq 0$
تحقق شرط دالة أخرى
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$
أو $F'(x) = f(x)$
أو بكلام آخر
$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = F(x)$$
حيث $f(x)$: دالة الكثافة الاحتمالية
$F(x)$: دالة التوزيع

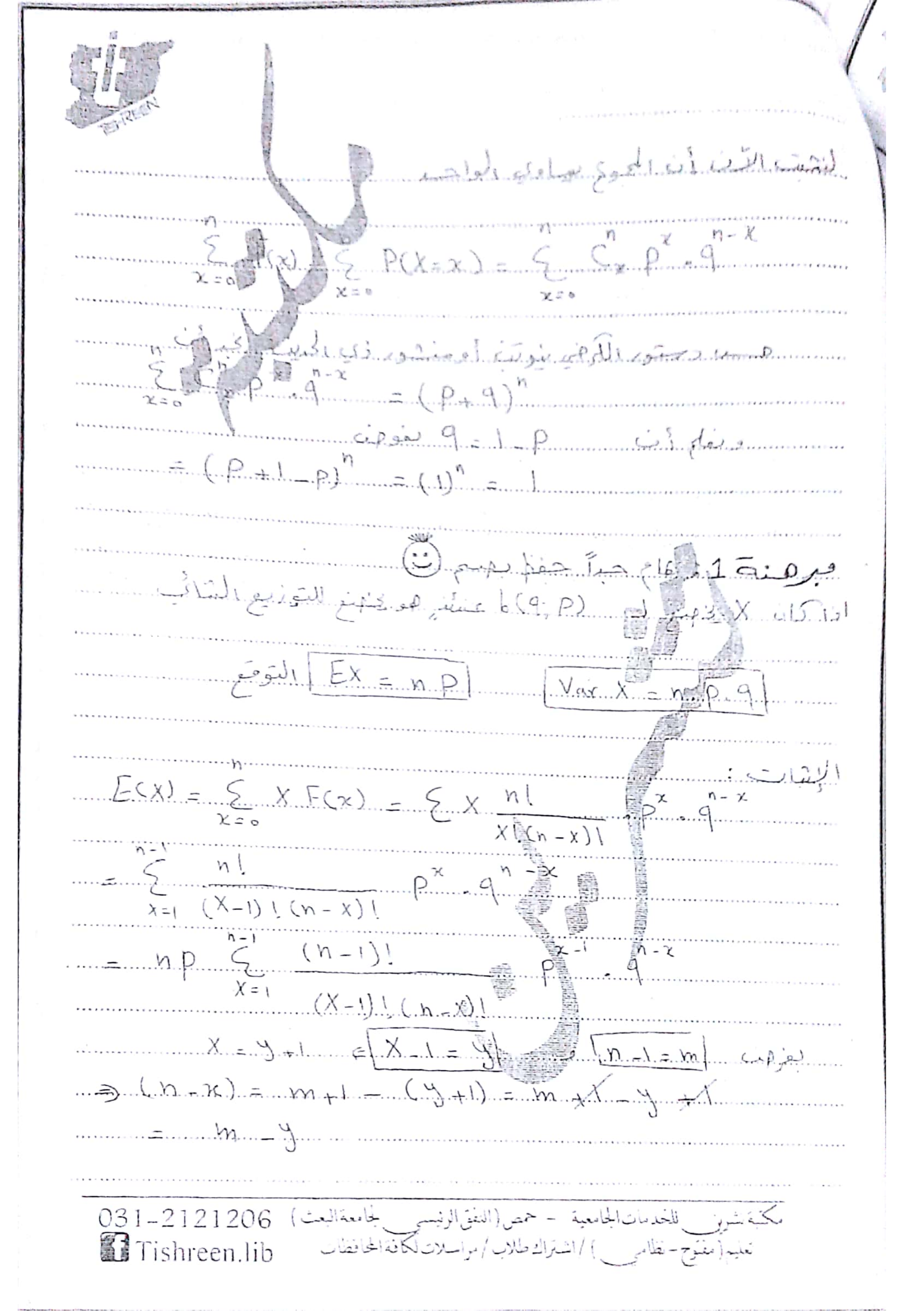
بعض التوزيعات المنفصلة الشهيرة:
1 - الثنائي الحدي: وهو يعالج تجربة ما وهذه التجربة لها احتمالين (نجاح أو فشل) اذا كان لدينا احتمالين نستخدم التوزيع الحدي الاحتمالي وهو غير سالب (موجب تماماً)

$$F(x) = P(X = x) = C_x^n \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

حيث x تأخذ القيم $0, 1, \ldots, n$
p: احتمال النجاح
q: احتمال الفشل (وهو الحدث المتمم حيث أن $q = 1 - p$)

C_x^n: وهو التوافيق حيث

$$C_x^n = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$



لنثبت الآن أن المجموع يساوي الواحد

$$\sum_{x=0}^{n} f(x) = \sum_{x=0} P(X=x) = \sum_{x=0}^{n} C_x^n p^x \cdot q^{n-x}$$

حسب دستور الكرخي نيوتن لمنشور ذي الحدين يكون

$$\sum_{x=0}^{n} C_x^n p^x \cdot q^{n-x} = (p+q)^n$$

ونعلم أن $q = 1-p$ نعوض

$$= (p+1-p)^n = (1)^n = 1$$

مبرهنة 1: هام جداً حفظ بصم ☺

اذا كان X يخضع لـ $b(q;p)$ عندئذ هو يخضع للتوزيع الثنائي

التوقع $\boxed{Ex = np}$ $\boxed{Var\ X = n\, p\, q}$

الإثبات:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x\, F(x) = \sum x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x \cdot q^{n-x}$$

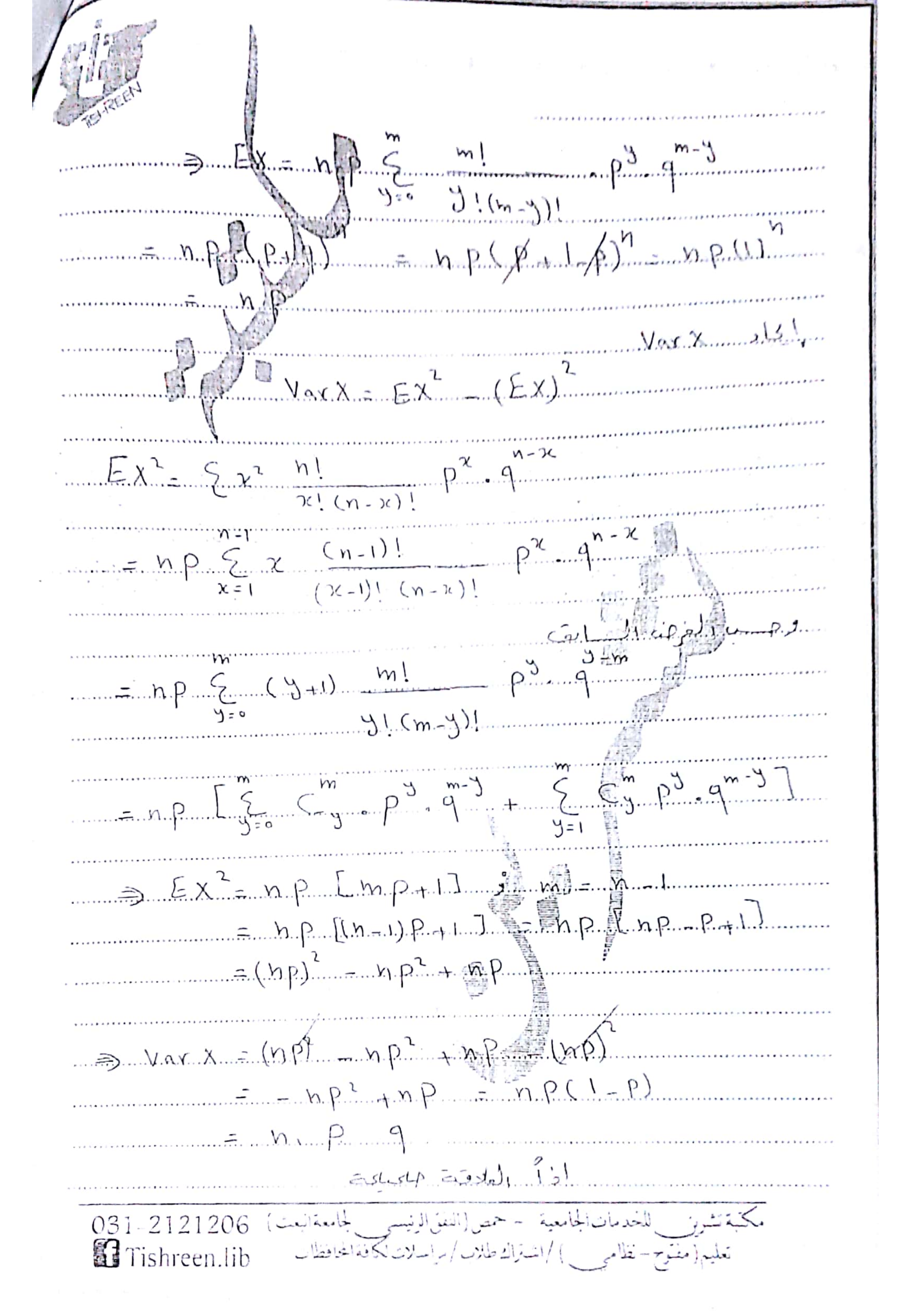
$$= \sum_{x=1}^{n-1} \frac{n!}{(X-1)!(n-x)!} p^x \cdot q^{n-x}$$

$$= np \sum_{X=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(X-1)!(n-X)!} p^{x-1} \cdot q^{n-x}$$

نفرض $\boxed{n-1=m}$ و $\boxed{X-1=y} \Leftarrow X = y+1$

$$\Rightarrow (n-x) = m+1-(y+1) = m + 1 - y - 1$$

$$= m - y$$



$$\Rightarrow E x = n p \sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{y!(m-y)!} p^{y} q^{m-y}$$

$$= n p (p+q)^{n} = n p (p + 1 - p)^{n} = n p (1)^{n}$$

$$= n p$$

إيجاد Var x

$$\operatorname{Var} X = E X^{2} - (E X)^{2}$$

$$E X^{2} = \sum x^{2} \frac{n!}{x!(n-x)!} p^{x} q^{n-x}$$

$$= n p \sum_{x=1}^{n-1} x \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x} q^{n-x}$$

وحسب الفرضية السابقة

$$= n p \sum_{y=0}^{m} (y+1) \frac{m!}{y!(m-y)!} p^{y} q^{y-m}$$

$$= n p \left[\sum_{y=0}^{m} C_{y}^{m} p^{y} q^{m-y} + \sum_{y=1}^{m} C_{y}^{m} p^{y} q^{m-y} \right]$$

$$\Rightarrow E X^{2} = n p [m p + 1] \quad \text{و} \quad m = n - 1$$

$$= n p [(n-1) p + 1] = n p [n p - p + 1]$$

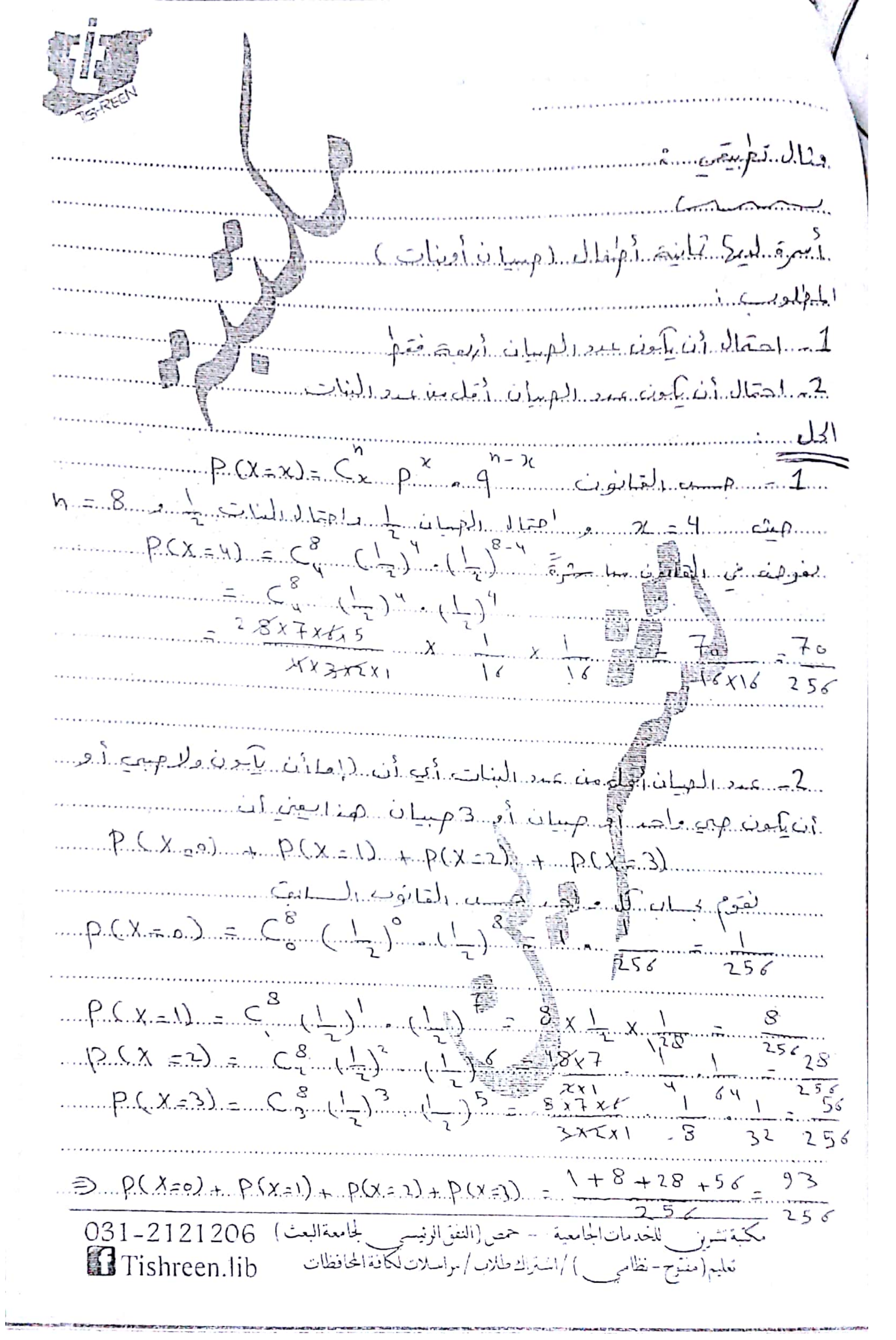
$$= (n p)^{2} - n p^{2} + n p$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var} x = (n p)^{2} - n p^{2} + n p - (n p)^{2}$$

$$= - n p^{2} + n p = n p (1 - p)$$

$$= n p q$$

إذاً العلاقة محققة



مثال تطبيقي :

أسرة لديها ثمانية أطفال (صبيان أو بنات)

المطلوب :

1- احتمال أن يكون عدد الصبيان أربعة فقط

2- احتمال أن يكون عدد الصبيان أقل من عدد البنات

الحل :

1- حسب القانون $P(X=x)=C_x^n \, p^x \cdot q^{n-x}$

حيث $x=4$ و احتمال الصبيان $\frac{1}{2}$ واحتمال البنات $\frac{1}{2}$ و $n=8$

نعوض في القانون مباشرة $P(X=4)=C_4^8 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8-4}$

$$= C_4^8 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{70}{16\times16} = \frac{70}{256}$$

2- عدد الصبيان أقل من عدد البنات أي أن (إما أن يكون ولا صبي أو أن يكون صبي واحد أو صبيان أو 3 صبيان) هذا يعني أن

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

نقوم بحساب كل منها حسب القانون السابق

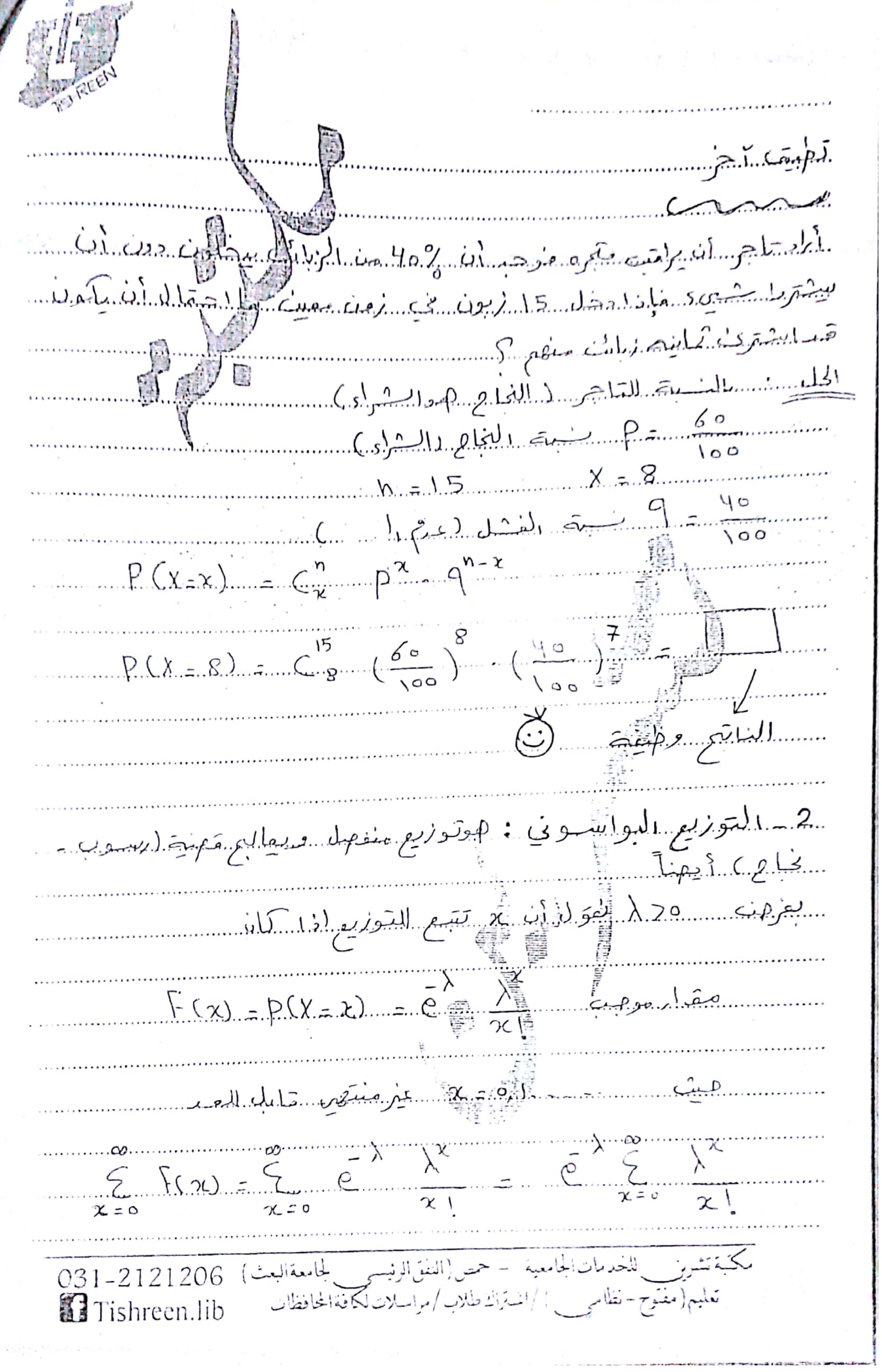
$$P(X=0) = C_0^8 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 1 \cdot \frac{1}{256} = \frac{1}{256}$$

$$P(X=1) = C_1^8 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 8 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{128} = \frac{8}{256}$$

$$P(X=2) = C_2^8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{8\times7}{2\times1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{64} = \frac{28}{256}$$

$$P(X=3) = C_3^8 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{32} = \frac{56}{256}$$

$$\Rightarrow P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{1+8+28+56}{256} = \frac{93}{256}$$



تطبيق آخر

أراد تاجر أن يراقب متجره فوجد أن 40% من الزبائن يدخلون دون أن يشتروا شيء فإذا دخل 15 زبون في زمن معين ما احتمال أن يكون قد اشترى ثمانية زبائن منهم ؟

الحل : بالنسبة للتاجر (النجاح هو الشراء)

$p = \frac{60}{100}$ نسبة النجاح (الشراء)

$n = 15 \qquad x = 8$

$q = \frac{40}{100}$ نسبة الفشل (عدم ...)

$$P(X=x) = C_x^n \; p^x \cdot q^{n-x}$$

$$P(X=8) = C_8^{15} \left(\frac{60}{100}\right)^8 \cdot \left(\frac{40}{100}\right)^7 = \square$$

الناتج وظيفة

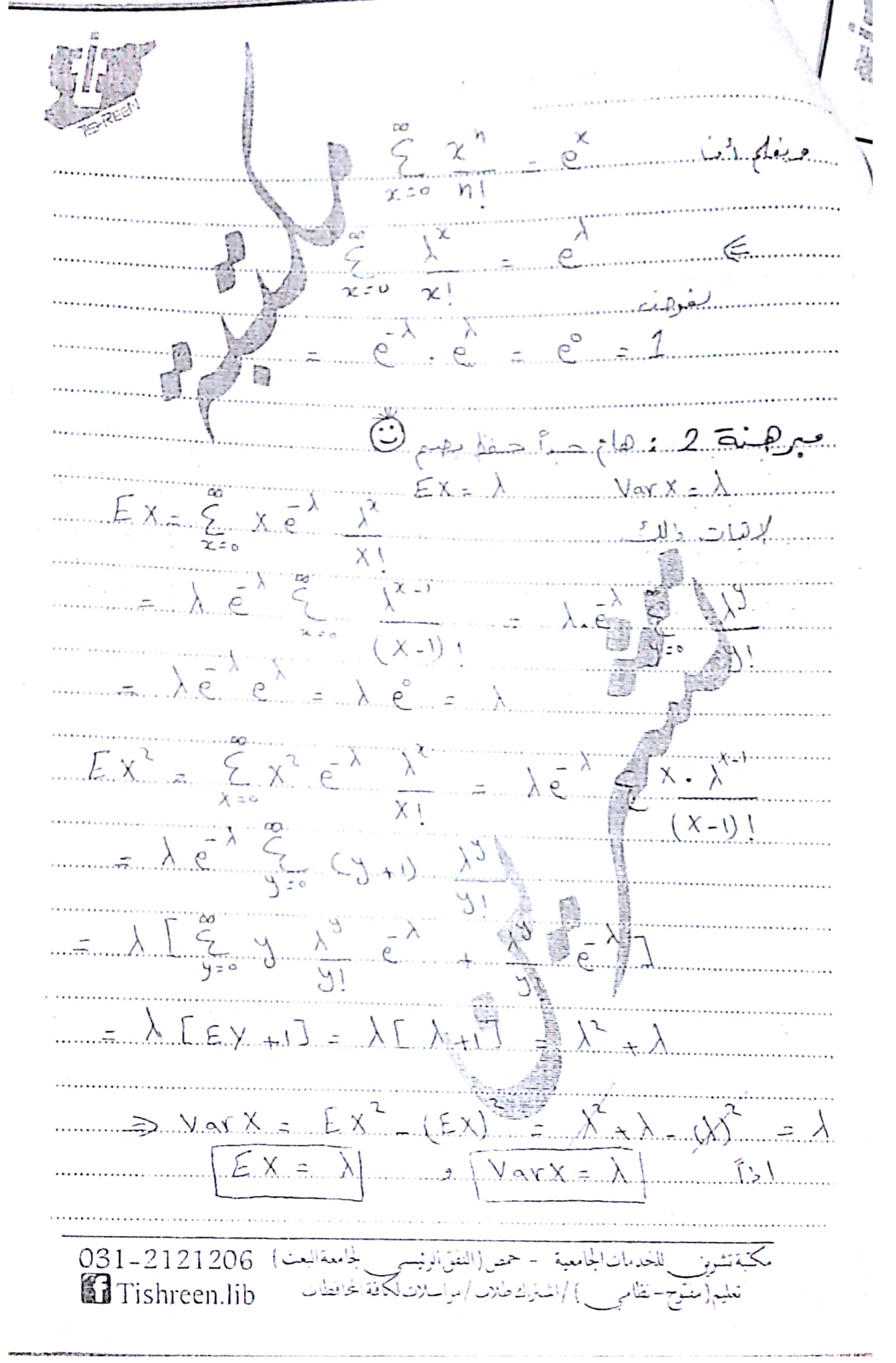
2 - التوزيع البواسوني : هو توزيع منفصل ويعالج قضية (رسوب - نجاح) أيضاً

بفرض $\lambda > 0$ نقول أن X تتبع التوزيع إذا كان :

$$F(x) = P(X=x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$ مقدار موجب

حيث $x = 0, 1, 2, \dots$ غير منتهي قابل للعد

$$\sum_{x=0}^{\infty} F(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$



ونعلم أنّ $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

⇐ $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^\lambda$

نعوض

$= e^{-\lambda} . e^{\lambda} = e^0 = 1$

مبرهنة 2 : هام جداً حفظ بصم

$EX = \lambda \qquad Var X = \lambda$

لإثبات ذلك

$EX = \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$

$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda . e^{-\lambda} \sum_{y=0} \frac{\lambda^y}{y!}$

$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda e^0 = \lambda$

$EX^2 = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \sum \frac{x . \lambda^{x-1}}{(x-1)!}$

$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} (y+1) \frac{\lambda^y}{y!}$

$= \lambda \left[\sum_{y=0}^{\infty} y \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} \right]$

$= \lambda [EY + 1] = \lambda [\lambda + 1] = \lambda^2 + \lambda$

$\Rightarrow Var X = EX^2 - (EX)^2 = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda$

اذاً $\boxed{EX = \lambda}$ و $\boxed{Var X = \lambda}$

مثال تطبيقي :

اذا كان لدينا 6% من سكان القطر يحملون زمرة الدم O ايجابي وأخذنا عينة من 100 شخص

ما احتمال أن نجد عشرة أشخاص لديهم زمرة الدم O ايجابي

الحل :

النجاح هو الحصول على زمرة الدم O ايجابي

$p = \frac{6}{100}$ $\quad n = 100 \quad x = 10$

ونعلم أن $n.p = \lambda$

$100 \times \frac{6}{100} = \lambda \Rightarrow \lambda = 6$

$$P(X=10) = e^{-6} \frac{6^{10}}{10!}$$

ملاحظة في غاية الأهمية :

التوزيعين السابقين وهما التوزيع الثنائي والتوزيع البواسوني استخدمان في حالة سلب إيجاب التعرف بينهما

أنه عندما يكبر العدد الكلي n و يصغر الاحتمال نستخدم البواسوني لأن n يسعى إلى اللانهاية ∞ حيث اذا كان $n > 50$ نستخدم البواسوني حصراً

وبكل ما يصغر العدد الكلي ويكبر الاحتمال نستخدم التوزيع الثنائي

« انتهت المحاضرة الثانية »

« مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح »

« اعداد : فاطمة الشمسيني »